Laboratorio 27/10/2010
Esercizi di manipolazione algebrica

1. Si dimostri che (A + ~B)(B + C) = AB + AC + ~BC.

(A + ~B)(B + C)	=	(A + ~B) B + (A + ~B) C	;applico distributiva
	=	AB + ~BB + AC + ~BC	
	=	AB + 0 + AC + ~BC	;inverso
	=	AB + AC + ~BC	;associativa ed identità

2. Si dimostri che x + ~xy = *x* + *y*.

x + ~xy	=	x + xy + ~xy	;assorbimento
	=	x + (x + ~x) y	;distributiva
	=	x + 1 y	;inverso
	=	x + y	;identita

3. Sia Y=A(A + ~B)(B + C) + ~BD una funzione logica. Si ricavi la SOP. Si proceda poi alla semplificazione algebrica della Y.

La forma SOP si ottiene esprimendo la funzione data tramite min-termini, cioè termini in cui compaioni tutti i letterali della funzione una sola volta congiunti dall'operatore AND ed eventualmente negati. Per ottenere questo occorre eliminare le parentesizzazioni e sviluppare i termini a cui mancano alcuni letterali:

Y =	A(A + ~B)(B + C) + ~BD	
=	(AA + A~B)(B+C) + ~BD	;distributiva
=	AAB + AAC + A~BB + A~BC + ~BD	
=	AB + AC + A0 + A~BC + ~BD	;idempotenza,inverso
=	AB +AC + 0 + A~BC + ~BD	;elemento nullo
=	AB + AC + A~BC + ~BD	;iassociativa,identità

Completo i mintermini:

= AB + AC + A~BC + ~BD
= AB1 + AC1 + A~BC1 + ~BD1
= AB(C+~C) + AC(B+~B) + A~BC (D+~D) + ~BD(A+~A)
= ABC1 + AB~C1 + ACB1 + AC~B1 + A~BCD + A~BC~D + ~BDA1 + ~BD~A1
= ABC(D+~D) + AB~C(D+~D) + ACB(D+~D) + AC~B(D+~D) + A~BCD + A~BC~D + ~BDA(C+~C) + ~BD~A(C+~C)
= ABCD + ABC~D + AB~CD + AB~C~D + ACBD + ACB~D + AC~BD + AC~B~D + A~BCD + A~BC~D + ~BDAC + ~BDA~C + ~BD~AC + ~BD~A~C
= ABCD + ABC~D + AB~CD + AB~C~D + ABCD + ABC~D + A~BCD + A~BC~D + A~BCD + A~BC~D + A~BCD + A~B~CD + ~A~BCD + ~A~B~CD

Ordino i termini secondo il loro ordine di min-termine per rendere più facile l'eliminazione dei termini ridondanti applicando x+x=x:

$$
\begin{aligned}
= \; & \sim A\sim B\sim CD_{(1)} + \sim A\sim BCD_{(3)} + A\sim B\sim CD_{(9)} + A\sim BC\sim D_{(10)} \\
& + \cancel{A\sim BC\sim D}_{(10)} + A\sim BCD_{(11)} + \cancel{A\sim BCD}_{(11)} \cancel{+ A\sim BCD}_{(11)} \\
& + AB\sim C\sim D_{(12)} + AB\sim CD_{(13)} + ABC\sim D_{(14)} + \cancel{ABC\sim D}_{(14)} \\
& + ABCD_{(15)} + \cancel{ABCD}_{(15)} \\
= \; & \sim A\sim B\sim CD_{(1)} + \sim A\sim BCD_{(3)} + A\sim B\sim CD_{(9)} + A\sim BC\sim D_{(10)} \\
& + A\sim BCD_{(11)} + AB\sim C\sim D_{(12)} + AB\sim CD_{(13)} + ABC\sim D_{(14)} + ABCD_{(15)}
\end{aligned}
$$

Da questa forma SOP possiamo ricavare la tabella di verità in maniera agevole considerando le configurazioni identificate dai min-termini:

A	B	C	D	Y	Min-termini
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	1	$\sim A\sim B\sim CD=m_1$
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	0	$\sim A\sim BCD=m_3$
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	0	
0	1	1	0	0	
0	1	1	1	0	
1	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	$A\sim B\sim CD=m_9$
1	0	1	0	1	$A\sim BC\sim D=m_{10}$
1	0	1	1	1	$A\sim BCD=m_{11}$
1	1	0	0	1	$AB\sim C\sim D=m_{12}$
1	1	0	1	1	$AB\sim CD=m_{13}$
1	1	1	0	1	$ABC\sim D=m_{14}$
1	1	1	1	1	$ABCD=m_{15}$

Semplifichiamo partendo dalla SOP:

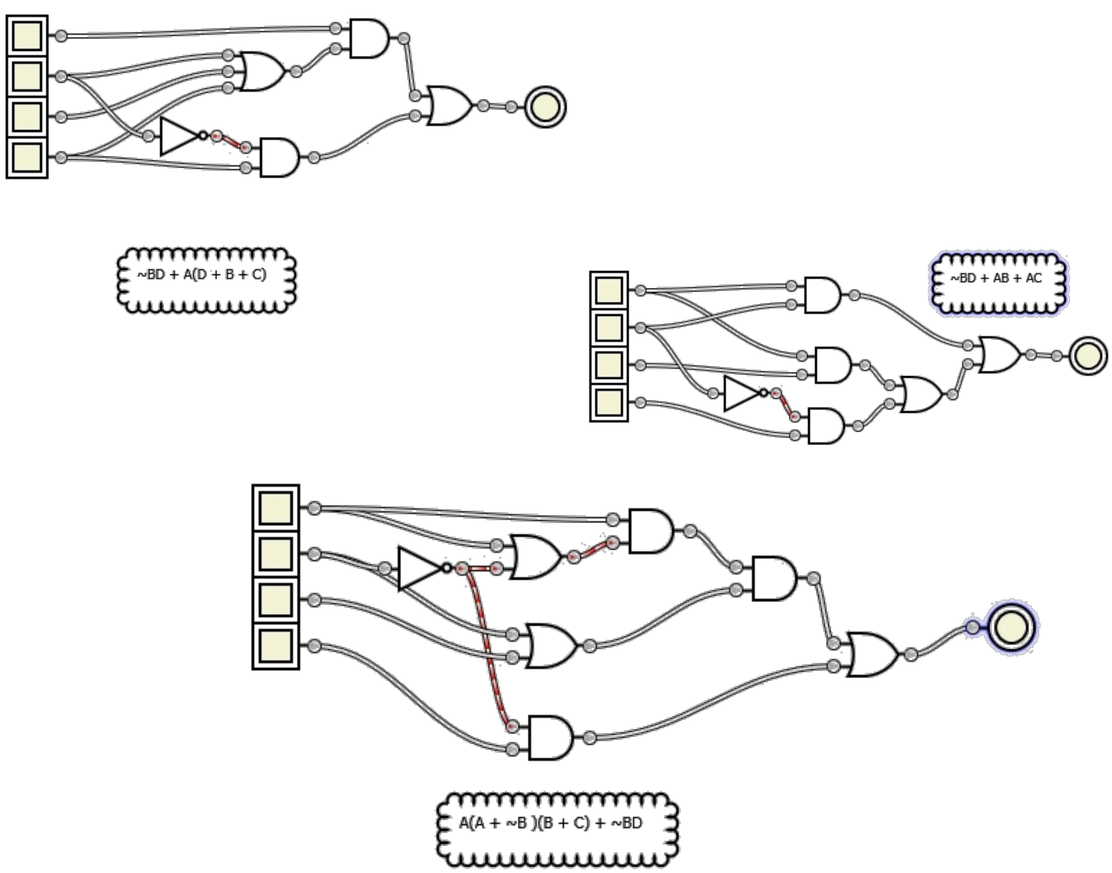
$$
\begin{aligned}
= \; & \sim A\sim B\sim CD + \sim A\sim BCD + A\sim B\sim CD + A\sim BC\sim D + A\sim BCD + AB\sim C\sim D \\
& + AB\sim CD + ABC\sim D + ABCD \\
= \; & (\sim C+C)\sim A\sim BD + A\sim B\sim CD + A\sim BC(\sim D+D) + AB\sim C(\sim D+D) + ABC(\sim D+D) \\
= \; & 1\sim A\sim BD + A\sim B\sim CD + A\sim BC1 + AB\sim C1 + ABC1 \\
= \; & \sim A\sim BD + A\sim B\sim CD + A\sim BC + AB\sim C + ABC \\
= \; & \sim A\sim BD + A\sim B\sim CD + A\sim BC + AB\sim C + BC) \\
= \; & \sim A\sim BD + A\sim B\sim CD + A(\sim BC + B\sim C + BC) \\
= \; & \sim A\sim BD + A\sim B\sim CD + A(B+C) \\
= \; & \sim A\sim BD + A\sim B\sim CD + AB + AC \\
= \; & \sim A\sim BD + A\sim B\sim CD + AB + AC + AC \\
= \; & \sim A\sim BD + A\sim B\sim CD + AB + A\sim BCD + AC \\
= \; & \sim A\sim BD + A\sim BD(\sim C+C) + AB + AC \\
= \; & \sim A\sim BD + A\sim BD1 + AB + AC \\
= \; & (\sim A+A)\sim BD + AB + AC
\end{aligned}
$$

= ~BD + AB + AC

Si può notare che la parte bassa della tabella corrisponde alla funzione A(B+C+D); proviamo a metttterla in evidenza nella formula:

= ~BD + A~C~BD +AB + AC
= ~BD + A(~C~BD + B + C)
= ~BD + A(~C~BD + B~CD + B + CD + C)
= ~BD + A(~CD (~B+B) + B + CD + C)
= ~BD + A(~CD + B + CD + C)
= ~BD + A((~C+C)D + B + C)
= ~BD + A(D + B + C)

Realizziamo questi circuiti in Gatesim:



4. Data la tabella:

A	B	C	X	Y
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Si ricavi la SOP delle due funzioni X e Y e si proceda alla semplificazione:

$$
\begin{aligned}
X &= \sim ABC + A\sim BC + AB\sim C + ABC \\
&= \sim ABC + A\sim BC + AB\sim C + AB\sim C + ABC \\
&= (\sim AB + A\sim B + AB)C + AB(\sim C + C) \\
&= (A + B)C + AB(\sim C + C) \\
&= (A + B)C + AB
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y &= \sim A\sim BC + \sim AB\sim C + A\sim B\sim C + ABC \\
&= \sim A(\sim BC + B\sim C) + A(\sim B\sim C + BC) \\
&= \sim A(B \oplus C) + A\ (\sim\sim(\sim B\sim C + BC)) \\
&= \sim A(B \oplus C) + A \sim\{\sim[\sim B\sim C)][\ \sim(BC)]\} \\
&= \sim A(B \oplus C) + A \sim\{([\sim\sim B]+[\ \sim\sim C])[(\sim B)+(\sim C)]\} \\
&= \sim A(B \oplus C) + A \sim\{(B+C)[\sim B+\sim C]\} \\
&= \sim A(B \oplus C) + A \sim\{(B\sim B + B\sim C + C\sim B + C\sim C]\} \\
&= \sim A(B \oplus C) + A \sim\{0 + B\sim C + C\sim B + 0\} \\
&= \sim A(B \oplus C) + A \sim\{B\sim C + C\sim B\} \\
&= \sim A(B \oplus C) + A \sim(B \oplus C) \\
&= A \oplus (B \oplus C) \\
&= (A \oplus B) \oplus C
\end{aligned}
$$

Se deriviamo diversamente X possiamo ri-usare due volte la porta A XOR B per codificare contemporaneamente le due funzioni:

$$
\begin{aligned}
X &= \sim ABC + A\sim BC + AB\sim C + ABC \\
&= (\sim AB + A\sim B)C + AB(\sim C + C) \\
&= (A \oplus B)C + AB(\sim C + C) \\
&= (A \oplus B)\ C + AB
\end{aligned}
$$